Révisions & Oraux ; Série N°2

Exercice 1 Soit $P \in K[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Exercice 2
1. Montrer que $\forall t > 0,\ \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation $(x+1)y' + y = (x+1)^3$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 3 [CCP MP] On considère une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan u_n$.
1. Montrer que (u_n) est monotone, et expliciter, en fonction de u_0, son sens de variation.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. ★ Déterminer les fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 4 On considère $S = \left\{ \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f},\ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*) \right\}$.
1. Calculer $\inf S$.
2. Montrer que S n'est pas majoré.
3. Déterminer S.

Exercice 5 [IMT MP] Quel est le nombre d'applications $f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Exercice 6 [Centrale PSI]
1. Justifier la convergence de $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ à l'aide de factorielles.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7 [Centrale MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A,B] = AB - BA$. Soit $E = \{[A,B], (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$.
1. Montrer que $\mathrm{tr}(M) = 0$ pour toute matrice $M \in E$.
2. Montrer que l'ensemble E est stable par similitude matricielle et par multiplication par un scalaire.
3. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
4. Montrer que E est egal à l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 8 [Mines MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 9 [Mines MP 2024] Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto f(x)e^{x^2}$, où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

Exercice 10 [ENS MP 2024] Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^{\circ n} n)$.

Révisions & Oraux ; Série N°2

Exercice 1 Soit $P \in K[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Exercice 2
1. Montrer que $\forall t > 0,\ \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation $(x+1)y' + y = (x+1)^3$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 3 [CCP MP] On considère une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan u_n$.
1. Montrer que (u_n) est monotone, et expliciter, en fonction de u_0, son sens de variation.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. ★ Déterminer les fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 4 On considère $S = \left\{ \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f},\ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*) \right\}$.
1. Calculer $\inf S$.
2. Montrer que S n'est pas majoré.
3. Déterminer S.

Exercice 5 [IMT MP] Quel est le nombre d'applications $f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Exercice 6 [Centrale PSI]
1. Justifier la convergence de $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ à l'aide de factorielles.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7 [Centrale MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A,B] = AB - BA$. Soit $E = \{[A,B], (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$.
1. Montrer que $\mathrm{tr}(M) = 0$ pour toute matrice $M \in E$.
2. Montrer que l'ensemble E est stable par similitude matricielle et par multiplication par un scalaire.
3. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
4. Montrer que E est egal à l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 8 [Mines MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 9 [Mines MP 2024] Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto f(x)e^{x^2}$, où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

Exercice 10 [ENS MP 2024] Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^{\circ n} n)$.